ヤン・ミルズ方程式から見たパンルヴェ方程式の退化 (複素領域における微分方程式の大域解析と漸近解析)

川向, 洋之; 新田, 貴士

数理解析研究所講究録 1367 巻 2004 年 134-146

ヤン・ミルズ方程式から見たパンルヴェ方程式の退化

川向 洋之，新田 貴士

2004年2月10日

[5] において，Mason と Woodhouse は，反自己双対ヤン・ミルズ方程式の簡約化からパンルヴェ方程式が得られることを示した．また，村田は，[6] において，Mason たちの結果を別の角度から見直し，ジョルダン群の作用で不変な反自己双対ヤン・ミルズ方程式のゲージポテンシャルが，パンルヴェ方程式を満たすことを示した．本稿では，村田の手法を参考にして，反自己双対ヤン・ミルズ方程式とモノドロミー保存変形との関係を，初等的な概念だけで書き直し，ジョルダン群の退化に応じてパンルヴェ方程式の退化が起きることを述べる．

1 ヤン・ミルズ方程式とパンルヴェ方程式

自然数 $k,n\,(k\leq n)$ に対し，$M_{k,n}, M^0_{k,n}$ を

$$M_{k,n} := \{X : k\times n \text{ 行列} \mid \mathrm{Rank}\, X = k\}$$

$$M^0_{k,n} := \left\{ X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{k1} & x_{k2} & \cdots & x_{kn} \end{bmatrix} \in M_{k,n} \;\middle|\; \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{k1} & x_{k2} & \cdots & x_{kk} \end{vmatrix} \neq 0 \right\}$$

と定める．また $M_{k,n}$ の元 X に対し，$\bar{X}$ で

$$\bar{X} := \{\, GX \mid G \in \mathrm{GL}_k(\mathbb{C})\,\}$$

を表すものとする．さらに $\bar{P}, \bar{P}_0, \bar{U}, \bar{U}_0, \bar{F}, \bar{F}_0$ を

$$\begin{aligned}
&\bar{P} := \{\bar{V} \mid V \in M_{1,4}\,\}, \quad \bar{P}_0 := \{\bar{V} \mid V \in M^0_{1,4}\,\} \\
&\bar{U} := \{\bar{X} \mid X \in M_{2,4}\,\}, \quad \bar{U}_0 := \{\bar{X} \mid X \in M^0_{2,4}\,\} \\
&\bar{F} := \{(\bar{V},\bar{X}) \in \bar{P}\times\bar{U} \mid {}^{\exists}(\zeta_0,\zeta_1) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\} \ \text{ st } \ V = [\zeta_0,\zeta_1]\,X\,\} \\
&\bar{F}_0 := \{(\bar{V},\bar{X}) \in \bar{F} \mid \bar{V} \in P_0,\ \bar{X} \in U_0\,\}
\end{aligned}$$

と置く．このとき，$\bar{P}_0, \bar{U}_0, \bar{F}_0$ の任意の元は，

$$\overline{[1\ \zeta\ \lambda\ \mu]}, \quad \overline{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \tilde{z} & \tilde{w} \\ 0 & 1 & w & z \end{bmatrix}}, \quad \left(\overline{[1\ \ \zeta\ \ \tilde{z}+\zeta w\ \ \tilde{w}+\zeta z]},\ \overline{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \tilde{z} & \tilde{w} \\ 0 & 1 & w & z \end{bmatrix}}\right)$$

と表せるので，$\bar{P}_0 \cong \mathbb{C}^3, \bar{U}_0 \cong \mathbb{C}^4, \bar{F}_0 \cong \mathbb{C}^5$ と同一視できる．以下，この同一視のもとで話を進める．

まず，反自己双対ヤン・ミルズ方程式とジョルダン群の説明をしておく．

反自己双対ヤン・ミルズ方程式について $\cdots$

$\Phi_{\tilde{z}}, \Phi_{\tilde{w}}, \Phi_w, \Phi_z$ は $\tilde{z}, \tilde{w}, w, z$ の解析関数を成分とする 2×2 の行列で，$\mathrm{trace}\,\Phi_{\tilde{z}} = \mathrm{trace}\,\Phi_{\tilde{w}} = \mathrm{trace}\,\Phi_w = \mathrm{trace}\,\Phi_z = 0$ を満たすものとする（$\Phi_{\tilde{z}}, \Phi_{\tilde{w}}, \Phi_w, \Phi_z$ は ζ によらないことに注意）．さらに

$$L = \frac{\partial}{\partial w} - \zeta\frac{\partial}{\partial \tilde{z}} + \Phi_w - \zeta\Phi_{\tilde{z}}$$
$$M = \frac{\partial}{\partial z} - \zeta\frac{\partial}{\partial \tilde{w}} + \Phi_z - \zeta\Phi_{\tilde{w}}$$

$$s = s(\bar{V}, \bar{X}) : \bar{F}_0 \text{ 上の2次元ベクトル値関数}$$

と置く．このとき，線形偏微分方程式系 $Ls = 0$, $Ms = 0$ の積分可能条件 $[L, M] = 0$ から従う式：

$$\frac{\partial}{\partial z}\Phi_w - \frac{\partial}{\partial w}\Phi_z + [\Phi_z, \Phi_w] = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial \tilde{z}}\Phi_{\tilde{w}} - \frac{\partial}{\partial \tilde{w}}\Phi_{\tilde{z}} + [\Phi_{\tilde{z}}, \Phi_{\tilde{w}}] = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\Phi_{\tilde{z}} - \frac{\partial}{\partial \tilde{z}}\Phi_z - \frac{\partial}{\partial w}\Phi_{\tilde{w}} + \frac{\partial}{\partial \tilde{w}}\Phi_w + [\Phi_z, \Phi_{\tilde{z}}] - [\Phi_w, \Phi_{\tilde{w}}] = 0$$

を反自己双対ヤン・ミルズ方程式と言う．

ジョルダン群について $\cdots$

n の分割 $\nu = (\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_d)$ に対し，

$$J_\nu = \left\{ J = \bigoplus_{k=1}^{d} J(h_0^{(\nu_k)}, \cdots, h_{\nu_k-1}^{(\nu_k)}) \;\middle|\; \det J \neq 0,\ h_j^{(\nu_k)} \in \mathbb{C}\ (k = 1, \cdots, d;\ j = 0, \cdots, \nu_k - 1) \right\}$$

をタイプ ν のジョルダン群と呼ぶ．ただし，$J(h_0, \cdots, h_{m-1})$ は，次で定義される $m \times m$ 行列である．

$$J(h_0, \cdots, h_{m-1}) = \sum_{k=0}^{m-1} h_k \left.\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}^k \right\} m \text{ 行}$$

$n = 4$ のとき，ジョルダン群 J_ν は5種類ある．これらの $\bar{U}$，および $\bar{F}$ への作用を

$$\begin{array}{ccc} J_\nu \times \bar{U} & \to & \bar{U} \\ \Psi & & \Psi \\ (J, \bar{X}) & \to & \overline{XJ} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} J_\nu \times \bar{F} & \to & \bar{F} \\ \Psi & & \Psi \\ (J, (\bar{V}, \bar{X})) & \to & (\overline{VJ}, \overline{XJ}) \end{array}$$

で定める．例えば，$\bar{X}$, J を

$$\bar{X} = \overline{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \tilde{z} & \tilde{w} \\ 0 & 1 & w & z \end{bmatrix}} \in \bar{U}, \quad J = \begin{bmatrix} 1 & a & & \\ & 1 & a & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \in J_{(3,1)}$$

としたとき，J の $\bar{X}$ への作用は

$$\begin{array}{cccl} J_{(3,1)} \times \bar{U} & \longrightarrow & \bar{U} & \\ \Psi & & \Psi & \\ (J, \bar{X}) & \longrightarrow & \overline{XJ} & = \overline{\begin{bmatrix} 1 & a & \tilde{z} & \tilde{w} \\ 0 & 1 & a+w & z \end{bmatrix}} \\ & & & = \overline{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -a^2 - aw + \tilde{z} & -az + \tilde{w} \\ 0 & 1 & a+w & z \end{bmatrix}} \end{array}$$

となる．なお，$\bar{P}$，$\bar{U}$ は，P，U を左からの $GL_2(\mathbb{C})$ の作用で割ったものなので，これらに作用するジョルダン群 J_ν の元の $(1,1)$ 成分を 1 としても一般性を失わない．このように仮定すると，$n=4$ のときのジョルダン群 J_ν は次のいずれかになる．

$$J_{(1,1,1,1)} = \left\{ X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\mathrm{a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\mathrm{b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\mathrm{c} \end{bmatrix} \middle| \det X \neq 0 \right\}$$

$$J_{(2,1,1)} = \left\{ X = \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{a} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\mathrm{b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\mathrm{c} \end{bmatrix} \middle| \det X \neq 0 \right\}$$

$$J_{(3,1)} = \left\{ X = \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{a} & \mathrm{b} & 0 \\ 0 & 1 & \mathrm{a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+\mathrm{c} \end{bmatrix} \middle| \det X \neq 0 \right\}$$

$$J_{(2,2)} = \left\{ X = \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{a} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\mathrm{b} & \mathrm{c} \\ 0 & 0 & 0 & 1+\mathrm{b} \end{bmatrix} \middle| \det X \neq 0 \right\}$$

$$J_{(4)} = \left\{ X = \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{a} & \mathrm{b} & \mathrm{c} \\ 0 & 1 & \mathrm{a} & \mathrm{b} \\ 0 & 0 & 1 & \mathrm{a} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \middle| \det X \neq 0 \right\}$$

また，簡単な計算により，次の命題を示すことができる．

命題 1 行列 $N_{(1,1,1,1)}, N_{(2,1,1)}, N_{(2,2)}, N_{(3,1)}, N_{(4)}$ を

$$N_{(1,1,1,1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & t \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad N_{(2,1,1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$N_{(2,2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad N_{(3,1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$N_{(4)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

と置く．このとき，4 の分割 ν に応じて，

$$\overline{XJ} = \overline{N_\nu} \quad \left(X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \tilde{z} & \tilde{w} \\ 0 & 1 & w & z \end{bmatrix} \right)$$

を満たす J_ν の元 J と，$\tilde{z}, \tilde{w}, w, z$ の有理関数 t が存在する．

行列 $N_{(1,1,1,1)}, \cdots, N_{(4)}$ は，3 節でまたでてくる．そこで，これらの行列に名前をつけて，「行列 X の J_ν による標準形」と呼ぶことにする．

次に，反自己双対ヤン・ミルズ方程式とジョルダン群から，どのようにしてパンルヴェ方程式がでてくるのかを説明する．

反自己双対ヤン・ミルズ方程式とパンルヴェ方程式について $\cdots$

説明の都合上，反自己双対ヤン・ミルズ方程式から IV 型パンルヴェ方程式を出すことにする．（他のタイプのパンルヴェ方程式も同様の計算で出せる．）

天下り的ではあるが，$\bar{F}_0$ 上の２次元ベクトル値関数 $s = s(\bar{V}, \bar{X})$ に，次の条件を課す．

$$s(\overline{VJ}, \overline{XJ}) = s(\bar{V}, \bar{X}) \quad \left({}^{\forall} J \in J_{(3,1)}\right) \qquad \cdots (\natural)$$

このとき，次の命題が成り立つ．

命題 2 $(\natural)$ の仮定の下で，$s = s(\bar{V}, \bar{X})$ は t, ξ の関数とみなすことができる．ここで t, ξ は

$$t = \frac{\tilde{w} + zw}{z}, \quad \xi = \zeta - w$$

である．

命題 3 $(\natural)$ の仮定の下で，$s = s(\bar{V}, \bar{X})$ は $\mathcal{X}_p s = \mathcal{X}_q s = \mathcal{X}_r s = 0$ を満たす．ここで，$\mathcal{X}_p$, $\mathcal{X}_q$, $\mathcal{X}_r$ は

$$\mathcal{X}_p = -w\frac{\partial}{\partial \tilde{z}} - z\frac{\partial}{\partial \tilde{w}} + \frac{\partial}{\partial w} + \frac{\partial}{\partial \zeta}, \quad \mathcal{X}_q = \frac{\partial}{\partial \tilde{z}}, \quad \mathcal{X}_r = \tilde{w}\frac{\partial}{\partial \tilde{w}} + z\frac{\partial}{\partial z}$$

である．

簡単なのでこれらの命題の証明をつけておく．

（命題２の証明）X, V を

$$V = [1 \ \ \zeta \ \ \tilde{z} + \zeta w \ \ \tilde{w} + \zeta z], \quad X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \tilde{z} & \tilde{w} \\ 0 & 1 & w & z \end{bmatrix}$$

と置く．このとき，

$$J = \begin{bmatrix} 1 & a & b & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+c \end{bmatrix} \quad \left(a = -w, b = -\tilde{z}, c = -1 + \frac{1}{z}\right)$$

とすれば，

$$\overline{VJ} = \overline{[1 \ \ \xi \ \ 0 \ \ t]}, \quad \overline{XJ} = \overline{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}.$$

よって，$(\natural)$ より，$s(\bar{V}, \bar{X}) = s\left(\overline{[1 \ \ \xi \ \ 0 \ \ t]}, \overline{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}\right)$．これは $s = s(\bar{V}, \bar{X})$ が t, ξ の関数であることを意味する．$\square$

（命題３の証明）行列 J_1, J_2, J_3 を

$$J_1 = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+c \end{bmatrix}$$

と置く．J_1 の $\bar{F}_0$ への作用は

$$\bar{V} = \overline{[1\ \zeta\ \lambda\ \mu]}, \quad \bar{X} = \overline{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \tilde{z} & \tilde{w} \\ 0 & 1 & w & z \end{bmatrix}}$$

$$\Longrightarrow \quad \overline{VJ_1} = \overline{[1\ a+\zeta\ a\zeta+\lambda\ \mu]}, \quad \overline{XJ_1} = \overline{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -a^2-aw+\tilde{z} & -az+\tilde{w} \\ 0 & 1 & a+w & z \end{bmatrix}}$$

なので，J_1 が引き起こす $\bar{F}_0$ 上の座標変換は $(\tilde{z},\tilde{w},w,z,\zeta) \to (-a^2-aw+\tilde{z},-az+\tilde{w},a+w,z,a+\zeta)$ となる．よって，この変換の無限小変換は

$$\mathcal{X}_p = -w\frac{\partial}{\partial\tilde{z}} - z\frac{\partial}{\partial\tilde{w}} + \frac{\partial}{\partial w} + \frac{\partial}{\partial\zeta}$$

で与えられる．一方，(ḃ) より $s(\overline{VJ_1},\overline{XJ_1}) - s(\bar{V},\bar{X}) = 0$．従って，この両辺を a で割り，$a \to 0$ とすると，

$$\lim_{a\to 0}\frac{s(\overline{VJ_1},\overline{XJ_1}) - s(\bar{V},\bar{X})}{a} = 0$$

を得る．これは $\mathcal{X}_p\, s = 0$ を意味する．

同様の計算を J_2, J_3 に対して行えば $\mathcal{X}_q\, s = \mathcal{X}_r\, s = 0$ を得る．このことと，J_1, J_2, J_3 が $J_{(3,1)}$ の生成元をなすことから命題２が従う．□

J_1, J_2, J_3 は可換な行列なので，これらの無限小変換である $\mathcal{X}_p, \mathcal{X}_q, \mathcal{X}_r$ も可換なベクトル場になる．故に，

$$\mathcal{X}_p = \frac{\partial}{\partial p}, \quad \mathcal{X}_q = \frac{\partial}{\partial q}, \quad \mathcal{X}_r = \frac{\partial}{\partial r}$$

となるように座標変換 $(\tilde{z},\tilde{w},w,z,\zeta) \to (p,q,r,t,\xi)$ を取ることができる．(具体的には $p = w, q = (2\tilde{z} + w^2)/2, r = \log z, t = (\tilde{w} + wz)/z, \xi = -w + \zeta$ と取ればよい．) そこで，

$$\Phi_{\tilde{z}}d\tilde{z} + \Phi_{\tilde{w}}d\tilde{w} + \Phi_w dw + \Phi_z dz = Pdp + Qdq + Rdr + Tdt$$

を満たすように行列 P, Q, R, T を定め，$Ls = 0, Ms = 0, \mathcal{X}_p\, s = \mathcal{X}_q\, s = \mathcal{X}_r\, s = 0$ を (p,q,r,t,ξ) と P, Q, R, T で表してみる．すると，少々複雑な計算の後に

$$Ls = 0,\ Ms = 0,\ \mathcal{X}_p\, s = \mathcal{X}_q\, s = \mathcal{X}_r\, s = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial\xi}s = \left(P - \xi Q + \dfrac{R}{\xi+t}\right)s & \cdots (a) \\ \dfrac{\partial}{\partial t}s = \left(\dfrac{R}{\xi+t} - T\right)s & \cdots (b) \\ \dfrac{\partial}{\partial p}s = \dfrac{\partial}{\partial q}s = \dfrac{\partial}{\partial r}s = 0 & \cdots (c) \end{cases}$$

が得られる．さらに，(a) は $\xi = -t$ を確定特異点，$\xi = \infty$ をポアンカレランク２の不確定特異点とする線形方程式，(b) は，(a) の変形パラメータ t に関する変形方程式になっていることも示せる．よって，$(a), (b), (c)$ の積分可能条件*1) から得られる式：

$$\frac{d}{dt}P = [Q,R], \quad \frac{d}{dt}Q = 0, \quad \frac{d}{dt}R = -[P+tQ,R] \tag{1}$$

*1) 適当なゲージ変換により $T = 0$ とできるので，このようにした場合の積分可能条件を書いた．

は，((a) のモノドロミー保存変形より得られる非線型方程式なので，) IV 型パンルヴェ方程式と同値なものである．また，構成の仕方から，(1) は，$Ls=0$, $Ms=0$, $\mathcal{X}_p s = \mathcal{X}_q s = \mathcal{X}_r s = 0$ の積分可能条件：

$$[L,M]=0 \quad \cdots (\dagger)$$
$$[L,\mathcal{X}_*]=[M,\mathcal{X}_*]=0 \quad (*=p,q,r) \quad \cdots (\ddagger)$$

と同値である．このことから，ヤン・ミルズ方程式 (†) に，$J_{(3,1)}$ によって決まる条件 (‡) をつければ，IV 型パンルヴェ方程式になることが分る．

注意 線形方程式 (a),(b) の係数行列 P,Q,R,T について，少しコメントしておく：ゲージ変換

$$s = M\,\bar{s} \quad \left(M \text{ は } \frac{\partial}{\partial \xi}M=0,\ \frac{\partial}{\partial t}M = TM \text{ を満たす } 2\times 2 \text{ 行列} \right)$$

により，$T=0$ と出来る．また，(1) の2番目の式より，Q は定数行列．よって，Q を対角化する適当な定数行列でゲージ変換し，うまく変数変換 $\xi=\alpha\bar{\xi}$（α は ξ,t によらない定数）を施せば，

$$Q = \begin{bmatrix} -1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

とすることが出来る．さらに

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ p_3 & -p_1 \end{bmatrix},$$

と置いて，これを (1) の最初の式に代入すれば，$dp_1/dt=0$ を得る．故に，変換

$$\xi = \bar{\xi} - 4p_1$$

によって $p_1=0$ と出来る．さらに，モノドロミー保存変形の一般論から，(a) の $\xi=-t$ における特性指数 $\pm\sqrt{-r_1{}^2 - r_2 r_3}$（$r_1,r_2,r_3$ は，行列 R の (1,1) 成分，(1,2) 成分，(2,1) 成分の意味）と $\xi=\infty$ における特性指数 $\pm(r_1+2p_2p_3)$ は t によらない（[2] 参照）ので，

$$r_1{}^2 + r_2 r_3 = \frac{1}{4}\kappa_0{}^2, \quad r_1 + 2p_2p_3 = \frac{1}{2}(\kappa_0 - 2\theta_\infty - 2)$$

と置くことが出来る（ただし，κ_0,θ_∞ は ξ,t によらない定数）．—— 以上により，行列 P,Q,R の各成分は p_2,r_1,r_2 と，定数 κ_0,θ_∞ によって表されることが分かった．特に，

$$p_2=\tau, \quad r_1 = \frac{1}{2}\{q(2p-q+t)-\kappa_0\}, \quad r_2 = -q\tau$$

と置くと，

$$p_3 = \frac{1}{4\tau}\{-qD + 2(\kappa_0-\theta_\infty-1)\}, \quad r_3 = \frac{1}{4\tau}D\,(qD-2\kappa_0) \quad (D=2p-q+t)$$

となり，これらを (1) に代入すれば，IV 型パンルヴェ方程式：

$$q' = -2qp + \frac{1}{2}q^2 - \frac{1}{2}tq + \kappa_0$$
$$p' = p^2 - qp + \frac{1}{2}pt + \frac{1}{2}\theta_\infty$$
$$\frac{\tau'}{\tau} = \frac{q}{2}$$

を得ることができる．

2 ジョルダン群の退化

ジョルダン群 J_ν $\bigl(\nu=(\nu_1,\cdots,\nu_d)\bigr)$ の元 J に，パラメータ ε を導入し，適当な行列 $g(\varepsilon)$ で共役な行列 $g(\varepsilon)\,J\,g(\varepsilon)^{-1}$ を作れば，

$$\lim_{\varepsilon\to 0} g(\varepsilon)\,J\,g(\varepsilon)^{-1}\in J_{\nu'}\quad \Bigl(\nu'=(\nu_1+\cdots+\nu_{k-1},\nu_k+\nu_{k+1},\nu_{k+2},\cdots,\nu_d)\Bigr)$$

とすることができる．例えば，

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_m & & & & \\ & a_1 & \ddots & \vdots & & & & \\ & & \ddots & a_2 & & & & \\ & & & a_1 & & & & \\ & & & & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ & & & & & b_2 & \ddots & \vdots \\ & & & & & & \ddots & b_2 \\ & & & & & & & b_1 \end{bmatrix}$$

の場合だと，

$$[a_1(\varepsilon),\ a_2(\varepsilon),\cdots,\ a_m(\varepsilon),\ b_1(\varepsilon),\ b_2(\varepsilon),\cdots,\ b_n(\varepsilon)]=[a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_m,\ b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n]\,g(\varepsilon)$$

$$g(\varepsilon)=\begin{bmatrix} I_m & g_1(\varepsilon)\\ O & g_2(\varepsilon)\end{bmatrix}\qquad \left(\begin{array}{l} \begin{bmatrix} g_1(\varepsilon)\\ g_2(\varepsilon)\end{bmatrix}=\mathrm{diag}(1\ \varepsilon\ \varepsilon^2\ \cdots\ \varepsilon^{m+n-1})\,M\,\mathrm{diag}(1\ \varepsilon\ \varepsilon^2\ \cdots\ \varepsilon^{n-1}) \\ M\ \text{の}\ (i,j)\ \text{成分}=\begin{cases} 0 & (i<j)\\ \dfrac{(i-1)!}{(i-j)!(j-1)!} & (i\ge j)\end{cases}\end{array}\right)$$

として，

$$g(\varepsilon)\begin{bmatrix} a_1(\varepsilon) & a_2(\varepsilon) & \cdots & a_m(\varepsilon) & & & & \\ & a_1(\varepsilon) & \ddots & \vdots & & & & \\ & & \ddots & a_2(\varepsilon) & & & & \\ & & & a_1(\varepsilon) & & & & \\ & & & & b_1(\varepsilon) & b_2(\varepsilon) & \cdots & b_n(\varepsilon) \\ & & & & & b_2(\varepsilon) & \ddots & \vdots \\ & & & & & & \ddots & b_2(\varepsilon) \\ & & & & & & & b_1(\varepsilon) \end{bmatrix} g(\varepsilon)^{-1}\qquad\cdots(\star)$$

を考えれば，

$$
(\star) \to \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_m & b_1 & b_2 & \cdots & \cdots & b_n \\ & a_1 & a_2 & \cdots & a_m & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} \\ & & a_1 & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & b_2 \\ & & & & \ddots & \ddots & & \ddots & b_1 \\ & & & & & \ddots & \ddots & & a_m \\ & & & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & & & & \ddots & a_2 \\ & & & & & & & & a_1 \end{bmatrix} \quad (\varepsilon \to 0)
$$

となる．これを「ジョルダン群の退化」と言う．(詳しいことは [1] 参照)

次節では，ジョルダン群の退化

$$
\begin{tikzcd}[row sep=small] & & J_{(3,1)} \arrow[dr] & \\ J_{(1,1,1,1)} \arrow[r] & J_{(2,1,1)} \arrow[ur] \arrow[dr] & & J_{(4)} \\ & & J_{(2,2)} \arrow[ur] & \end{tikzcd}
$$

に応じてパンルヴェ方程式の退化が起きることを述べる．

3 ジョルダン群の退化と，パンルヴェ方程式の退化

前節のジョルダン群の退化の計算から，次のことが分かる：ジョルダン群 $J_{(3,1)}$ の元

$$
J = \begin{bmatrix} 1 & a & b & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+c \end{bmatrix}
$$

の a, b, c を

$$
[1,\ a(\varepsilon),\ b(\varepsilon),\ c(\varepsilon)] = [1,\ a,\ b,\ c]\, g(\varepsilon)
$$

$$
g(\varepsilon) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \varepsilon \\ 0 & 0 & 1 & \varepsilon^2 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon^3 \end{bmatrix}
$$

で定まる $a(\varepsilon), b(\varepsilon), c(\varepsilon)$ に変更し，

$$
\begin{aligned}
J(\varepsilon) = g(\varepsilon) &\begin{bmatrix} 1 & a(\varepsilon) & b(\varepsilon) & 0 \\ 0 & 1 & a(\varepsilon) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+c(\varepsilon) \end{bmatrix} g(\varepsilon)^{-1} \\
= &\begin{bmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & a & b+c\varepsilon \\ 0 & 0 & 1 & a+b\varepsilon+c\varepsilon^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1+a\varepsilon+b\varepsilon^2+c\varepsilon^3 \end{bmatrix} \qquad \cdots (\sharp)
\end{aligned}
$$

と置く．そして，$\varepsilon \to 0$ とすると，

$$(\sharp) \to \begin{bmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & a & b \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\varepsilon \to 0)$$

が得られる．—— このように，極限操作で $J_{(3,1)}$ の元を $J_{(4)}$ の元にすることができた．そこで，

$$\hat{J}_{(3,1)} = \left\{ J = \begin{bmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & a & b+c\varepsilon \\ 0 & 0 & 1 & a+b\varepsilon+c\varepsilon^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1+a\varepsilon+b\varepsilon^2+c\varepsilon^3 \end{bmatrix} \;\middle|\; \det J \neq 0 \right\}$$

と置いたとき，条件

$$s(\overline{VJ}, \overline{XJ}) = s(\bar{V}, \bar{X}) \quad \left({}^\forall J \in \hat{J}_{(3,1)}\right)$$

から得られる s の微分方程式が，$\varepsilon \to 0$ でどうなるのか見てみる．

前と同じように $\hat{J}_{(3,1)}$ の生成元

$$J_1 = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1+a\varepsilon \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & b\varepsilon \\ 0 & 0 & 0 & 1+b\varepsilon^2 \end{bmatrix}, \quad J_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 & c\varepsilon \\ 0 & 0 & 1 & c\varepsilon^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1+c\varepsilon^3 \end{bmatrix}$$

の無限小変換を $\mathcal{X}_p, \mathcal{X}_q, \mathcal{X}_r$ とする．また，$\hat{J}_{(3,1)}$ の元 J をうまく選んで，

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \tilde{z} & \tilde{w} \\ 0 & 1 & w & z \end{bmatrix}$$

が，

$$\overline{XJ} = \overline{\begin{bmatrix} 1 & 0 & * & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \quad \left(\leftarrow X \text{ の } J_{(4)} \text{ による標準形}\right) \tag{2}$$

($*$ は $\tilde{z}, \tilde{w}, w, z, \varepsilon$ の有理関数) となるようにし，$*$ のところを t と置く．さらに ξ を

$$[1 \;\; \xi \;\; t \;\; 0] = [1 \;\; \zeta \;\; \tilde{z}+\zeta w \;\; \tilde{w}+\zeta z]J$$

で定める (J は (2) の所で現われた行列 J)．このとき，$\mathcal{X}_p = \partial/\partial p$, $\mathcal{X}_q = \partial/\partial q$, $\mathcal{X}_r = \partial/\partial r$ となるように座標変換 $(\tilde{z}, \tilde{w}, w, z, \zeta) \to (p, q, r, t, \xi)$ を取り，前と同様の計算を行えば，s の満たす微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial \xi} s = -(Q - \varepsilon^{-1}R)\xi + P - \varepsilon^{-2}R + \frac{\varepsilon^{-3}R}{\xi + t\varepsilon + \varepsilon^{-1}} \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} s = Q - \varepsilon^{-1}R - T + \frac{\varepsilon^{-2}R}{\xi + t\varepsilon + \varepsilon^{-1}} \tag{4}$$

$$\frac{\partial}{\partial p} s = \frac{\partial}{\partial q} s = \frac{\partial}{\partial r} s = 0 \tag{5}$$

が得られる．

方程式 (3),(4),(5) の t, P, Q, R, T を，

$$t = \varepsilon^{-1}t' - \varepsilon^{-2}, \quad P = P' + \varepsilon R', \quad Q = Q' + \varepsilon^2 R', \quad R = \varepsilon^3 R', \quad T = Q' + \varepsilon T'$$

と変換し，t',P',Q',R',T' を改めて t,P,Q,R,T と書き直すと，これらは 5 ページの (a),(b),(c) と一致する．一方，(3),(4),(5) で $\varepsilon \to 0$ とすると，

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial \xi}s = \left(\xi^2 R - \xi Q + P - tR\right)s \\
&\frac{\partial}{\partial t}s = (-\xi R + Q - T)s \\
&\frac{\partial}{\partial p}s = \frac{\partial}{\partial q}s = \frac{\partial}{\partial r}s = 0
\end{aligned}$$

となる．これは II 型パンルヴェ方程式を与える線形方程式系である（付録参照）．このように，ジョルダン群の退化に応じて，パンルヴェ方程式の退化が起きることが分かった．—— なお，他のタイプの退化でも，同様のことが言える．

最後に ...

本稿では次のことを述べた．

- 反自己双対ヤン・ミルズ方程式と，モノドロミー保存変形との関係を，村田の方法で書き直した．
- ジョルダン群の退化に応じて，パンルヴェ方程式の退化が起きることを述べた．

また，今回はパンルヴェ方程式の退化だけを述べたが，2 変数のガルニエ系の場合でも同様のことが成り立つ．

現在のところ，パンルヴェ方程式の退化しか見ていないが，ヤン・ミルズ方程式に含まれる他の方程式に関しても，同様に退化が考えられると思われる．今後，どのような方程式が退化で移りあうのかを調べて行きたいと思う．

4 付録

ジョルダン群 J_ν（ν は 4 の分割）の生成元 J_1, J_2, J_3 と，これらの無限小変換 $\mathcal{X}_p, \mathcal{X}_q, \mathcal{X}_r$ ，座標変換 $(\tilde{z}, \tilde{w}, w, z, \zeta) \to (p, q, r, t, \xi)$，および F_0 上のベクトル値関数 s の満たす線形方程式と，その積分可能条件を記す．なお，計算方法が少し異なるため，[5] の表と少し異なる部分があるが，結果は本質的に同じである．

表記の都合上，$\nu_6 = (1,1,1,1), \nu_5 = (2,1,1), \nu_4 = (3,1), \nu_3 = (2,2), \nu_2 = (4)$ とする．

☆ ジョルダン群の生成元．

$$\nu_6: \quad J_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+a \end{bmatrix}$$

$$\nu_5: \quad J_1 = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+a \end{bmatrix}$$

$$\nu_4: \quad J_1 = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+a \end{bmatrix}$$

$$\nu_3: \quad J_1 = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1+a \end{bmatrix}, \quad J_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\nu_2: \quad J_1 = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad J_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

☆ J_1, J_2, J_3 が成すベクトル場 $\mathcal{X}_p, \mathcal{X}_q, \mathcal{X}_r$.

$$\nu_6: \quad \mathcal{X}_p = -w\frac{\partial}{\partial w} - z\frac{\partial}{\partial z} + \zeta\frac{\partial}{\partial \zeta}, \qquad \mathcal{X}_q = \tilde{z}\frac{\partial}{\partial \tilde{z}} + w\frac{\partial}{\partial w}, \qquad \mathcal{X}_r = \tilde{w}\frac{\partial}{\partial \tilde{w}} + z\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nu_5: \quad \mathcal{X}_p = -w\frac{\partial}{\partial \tilde{z}} - z\frac{\partial}{\partial \tilde{w}} + \frac{\partial}{\partial \zeta}, \qquad \mathcal{X}_q = \tilde{z}\frac{\partial}{\partial \tilde{z}} + w\frac{\partial}{\partial w}, \qquad \mathcal{X}_r = \tilde{w}\frac{\partial}{\partial \tilde{w}} + z\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nu_4: \quad \mathcal{X}_p = -w\frac{\partial}{\partial \tilde{z}} - z\frac{\partial}{\partial \tilde{w}} + \frac{\partial}{\partial w} + \frac{\partial}{\partial \zeta}, \quad \mathcal{X}_q = \frac{\partial}{\partial \tilde{z}}, \qquad \mathcal{X}_r = \tilde{w}\frac{\partial}{\partial \tilde{w}} + z\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nu_3: \quad \mathcal{X}_p = -w\frac{\partial}{\partial \tilde{z}} - z\frac{\partial}{\partial \tilde{w}} + \frac{\partial}{\partial \zeta}, \quad \mathcal{X}_q = \tilde{z}\frac{\partial}{\partial \tilde{z}} + \tilde{w}\frac{\partial}{\partial \tilde{w}} + w\frac{\partial}{\partial w} + z\frac{\partial}{\partial z}, \quad \mathcal{X}_r = \tilde{z}\frac{\partial}{\partial \tilde{w}} + w\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nu_2: \quad \mathcal{X}_p = -w\frac{\partial}{\partial \tilde{z}} + (\tilde{z} - z)\frac{\partial}{\partial \tilde{w}} + \frac{\partial}{\partial w} + w\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \zeta}, \quad \mathcal{X}_q = \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} + \frac{\partial}{\partial z}, \quad \mathcal{X}_r = \frac{\partial}{\partial \tilde{w}}$$

☆ 座標変換 $(\tilde{z},\tilde{w},w,z,\zeta)\to(p,q,r,t,\xi)$.

$$\nu_6:\quad (\tilde{z},\tilde{w},w,z,\zeta)=(e^q,te^r,e^{q-p},e^{r-p},\xi e^p)$$

$$\nu_5:\quad (\tilde{z},\tilde{w},w,z,\zeta)=(-pe^q,(t-p)e^r,e^q,e^r,\xi+p)$$

$$\nu_4:\quad (\tilde{z},\tilde{w},w,z,\zeta)=\left(q-\frac{1}{2}p^2,(t-p)e^r,p,e^r,\xi+p\right)$$

$$\nu_3:\quad (\tilde{z},\tilde{w},w,z,\zeta)=(-pe^q,(t-pr)e^q,e^q,re^q,\xi+p)$$

$$\nu_2:\quad (\tilde{z},\tilde{w},w,z,\zeta)=\left(q-\frac{1}{2}p^2+t,r-\frac{1}{3}p^3+tp,p,q+\frac{1}{2}p^2,\xi+p\right)$$

☆ F_0 上のベクトル値関数 s が満たす線形方程式.（ただし $\partial/\partial p\, s=\partial/\partial q\, s=\partial/\partial r\, s=0$ は省略）

$$\nu_6:\quad \frac{\partial}{\partial\xi}s=\left(\frac{P}{\xi}+\frac{Q}{\xi+1}+\frac{R}{\xi+t}\right)s,\quad \frac{\partial}{\partial t}s=\left(\frac{R}{\xi+t}-T\right)s$$

$$\nu_5:\quad \frac{\partial}{\partial\xi}s=\left(P+\frac{Q}{\xi}+\frac{R}{\xi+t}\right)s,\quad \frac{\partial}{\partial t}s=\left(\frac{R}{\xi+t}-T\right)s$$

$$\nu_4:\quad \frac{\partial}{\partial\xi}s=\left(P-\xi Q+\frac{R}{\xi+t}\right)s,\quad \frac{\partial}{\partial t}s=\left(\frac{R}{\xi+t}-T\right)s$$

$$\nu_3:\quad \frac{\partial}{\partial\xi}s=\left(P+\frac{Q}{\xi}-\frac{tR}{\xi^2}\right)s,\quad \frac{\partial}{\partial t}s=\left(\frac{R}{\xi}-T\right)s$$

$$\nu_2:\quad \frac{\partial}{\partial\xi}s=(P-tR-\xi Q+\xi^2R)\,s,\quad \frac{\partial}{\partial t}s=(Q-T-\xi R)\,s$$

※ 上記の方程式の形を見て分かるように，適当なゲージ変換を施せば，T を 0 にすることができる.

☆ s の満たす線形方程式の積分可能条件.（ただし $T=0$ としある）

$$\nu_6:\quad \frac{d}{dt}P=-\left[\frac{1}{t}P,R\right],\quad \frac{d}{dt}Q=-\left[\frac{1}{t-1}Q,R\right],\quad \frac{d}{dt}R=\left[\frac{1}{t}P+\frac{1}{t-1}Q,R\right]$$

$$\nu_5:\quad \frac{d}{dt}P=0,\quad \frac{d}{dt}Q=-\left[\frac{1}{t}Q,R\right],\quad \frac{d}{dt}R=\left[-P+\frac{1}{t}Q,R\right]$$

$$\nu_4:\quad \frac{d}{dt}P=[Q,R],\quad \frac{d}{dt}Q=0,\quad \frac{d}{dt}R=[-P-tQ,R]$$

$$\nu_3:\quad \frac{d}{dt}P=0,\quad \frac{d}{dt}Q=[-P,R],\quad \frac{d}{dt}R=\left[\frac{1}{t}Q,R\right]$$

$$\nu_2:\quad \frac{d}{dt}P=-[P-tR,Q],\quad \frac{d}{dt}Q=-[P,R],\quad \frac{d}{dt}R=0$$

参考文献

[1] 原岡 喜重：超幾何関数（すうがくの風景），朝倉書店, (2002).

[2] M. Jimbo and T. Miwa : Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients, I. Phys. D 2 (1981), 306–352.

[3] H. Kimura, Y. Haraoka, and K. Takano : The generalized confluent hypergeometric functions, Proc. Japan Acad., Ser. A, **68** (1992), 290 – 295.

[4] H. Kimura, Y. Haraoka, and K. Takano : On confluences of the general hypergeometric systems, Proc. Japan Acad., Ser. A **69** (1993), 100 – 104.

[5] L. J. Mason, and N. M. J. Woodhouse : Integrability Self-Duality, and Twistor Theory, Oxford University Press Inc., New York, (1996).

[6]「超幾何系ワークショップ in 神戸 '99」における村田嘉弘氏の講演ノート（川向のプライベートノート）